Vectoranalyse

3 juli 2008, 14–17 uur (Examenhal)

Dit tentamen bestaat uit de volgende **vier** opgaven. Het maximale aantal punten is per opgave aangegeven. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (25 pt.)
Het oppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door de vergelijking

$$x^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2xz - 2 = 0.$$

1. Geef de vergelijking van het raakvlak aan S in een punt $(x_0, y_0, z_0) \in S$.
2. Bereken het punt (de punten) van S waarin het raakvlak door $(1, 0, 0)$ gaat en evenwijdig is met de y-as.

Opgave 2 (20 pt.)
In $\mathbb{R}^2$ is gegeven het gesloten gebied D met als rand de driehoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(2, 0)$ en $(2, 4)$. Verder is $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y) = (x^2 - 1)(1 - y^2)$.

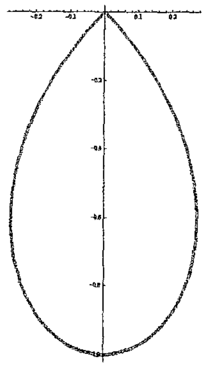
1. Waarom neemt f een globaal maximum en een globaal minimum aan op D?
2. Bepaal de posities van alle kandidaat globale maxima en kandidaat globale minima van f op D.
3. Bereken het globale maximum en het globale minimum van f op D.

Z.O.Z.

Opgave 3 (20 pt.)
Zij γ een parametrisering van een kromme in het vlak, gegeven door

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos 2t \cos t, \cos 2t \sin t),$$

waarbij $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$.



1. Bewijs dat γ één-op-één is op het interval $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, en dat het beeld van γ een gesloten kromme in $\mathbb{R}^2$ is.

   Voor de volledigheid: γ is één-op-één als $\gamma(t) = \gamma(s)$ dan en slechts dan als $s = t$.

2. Zij $\mathbf{F}$ het vectorveld op $\mathbb{R}^2$ gegeven door $\mathbf{F}(x, y) = -2y \sin^2 x\, \mathbf{i} + (x + \sin x \cos x)\, \mathbf{j}$. Bereken

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}.$$

Opgave 4 (25 pt.)
Gegeven is een gladde functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, homogeen van de graad k, d.w.z.:

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z), \text{ voor } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

Laat $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

1. Bewijs de *relatie van Euler*:

$$x\, f_x + y\, f_y + z\, f_z = k\, f.$$

   Hint: neem de afgeleide van beide leden van (1) naar t, en neem daarna $t = 1$.

2. Toon aan dat

$$\iiint_D \nabla^2 f\, dV = \iint_{\partial D} k f\, dS.$$

   Hierbij is $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$ de Laplaciaan van f.

3. Laat

$$f(x, y, z) = a_1 x^4 + a_2 y^4 + a_3 z^4 + 3a_4 x^2 y^2 + 3a_5 y^2 z^2 + 3a_6 x^2 z^2.$$

   Bewijs dat

$$\iint_{\partial D} f\, dS = \frac{4\pi}{5} \sum_{i=1}^{6} a_i.$$